

# **COMPITI PER LE VACANZE ESTIVE di MATEMATICA**

**e**

attività di recupero per gli studenti con  
giudizio sospeso

**CLASSE 4 I – Liceo Scientifico**

**A.S. 2018 – 2019**

Nelle pagine seguenti sono raccolti gli esercizi riguardanti i principali argomenti affrontati durante l'anno. Sono suddivisi in 2 parti.

1. Esponenziali e logaritmi.
2. Matrici e trasformazioni geometriche.
3. Geometria euclidea nello spazio.
4. Geometria analitica nello spazio.
5. Calcolo combinatorio.
6. Calcolo delle probabilità.

Gli studenti che hanno riportato una valutazione di sospensione del giudizio devono svolgere tutti gli esercizi proposti e portare il quaderno il giorno della prova scritta. Nel caso di sospensione di giudizio devono essere inoltre svolti gli esercizi delle "verifiche delle competenze - allenamento" dei capitoli di trigonometria e equazioni e disequazioni goniometriche e deve essere effettuato un ripasso di tutti gli argomenti affrontati durante l'anno scolastico, in particolare delle dimostrazioni svolte.

Lo svolgimento degli esercizi è caldamente consigliato anche agli studenti che hanno riportato valutazione positiva. L'insegnante comunica fin da ora che nelle prime due settimane di scuola, anno scolastico 2019/2020, verrà svolta una prova di verifica su tutti gli argomenti della classe quarta che concorrerà alla media del trimestre.

Buone vacanze!

Torino, 5 giugno 2019

Prof.ssa Alessia Casasso

## ESPONENZIALI E LOGARITMI

**ES 1.** Risolvi le seguenti equazioni esponenziali.

- |  |                                 |
|--|---------------------------------|
| 1) $2^{x+1} - 2^x + 2^{x-2} = 5$                               | $[x = 2]$                       |
| 2) $3^x + 3^{3-x} = 12$  | $[x = 1 \vee x = 2]$            |
| 3) $6^x \cdot 6^{\frac{8}{x+3}} \cdot 6^{-\frac{2x+1}{x}} = 1$ | $[x = -\frac{3}{2} \vee x = 5]$ |
| 4) $9^x + 6 \cdot 3^x - 27 = 0$                                | $[x = 1]$                       |

**ES 2.** Risolvi le seguenti disequazioni esponenziali.

- |   |               |
|---|---------------|
| 1) $7 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{x+1} + \left(\frac{1}{3}\right)^x - \left(\frac{1}{3}\right)^{x+1} > 9$ | $[x < -1]$    |
| 2) $16^x - 2 \cdot 4^x - 8 > 0$   | $[x > 1]$     |
| 3) $\left(\frac{2}{5}\right)^{-x+1} \leq \frac{4}{25}$  | $[x \leq -1]$ |

**ES 3.** Risolvi le seguenti equazioni e disequazioni esponenziali, utilizzando il metodo grafico.

- |                               |               |
|-------------------------------|---------------|
| 1) $e^{x+1} = -x^3$           | $[x = -1]$    |
| 2) $e^{x+1} + 2 \geq  x - 2 $ | $[x \geq -2]$ |
| 3) $3^{ x } < 2x + 1$         | $[0 < x < 1]$ |

**ES 4.** Risolvi le seguenti equazioni logaritmiche.

- |  |                     |
|--|---------------------|
| 1) $2 \log_5 \sqrt{x^2 - 1} = 1$                     | $[x = \pm\sqrt{6}]$ |
| 2) $\log 2 + \log(x^2 - 2x - 1) = 2 \log(x - 1)$     | $[x = 3]$           |
| 3) $\log_2(2x - 1) = \log_4(1 + x) + \log_4(4x - 5)$ | $[x = 2]$           |

**ES 5.** Risolvi le seguenti disequazioni logaritmiche.

- |  |                |
|--|----------------|
| 1) $\log_9(1 - x) + \log_9(1 + x) < 1$   | $[-1 < x < 1]$ |
| 2) $\log_3 \frac{x+4}{x-2} > 1$  | $[2 < x < 5]$  |
| 3) $\log_{\frac{1}{2}}(x - 2) + \log_{\frac{1}{2}} x < \log_{\frac{1}{2}}(12 - x)$ | $[4 < x < 12]$ |
| 4) $\log(x + 3) + \log(x + 5) < \log 3 + \log(2x + 5)$                             | $[-2 < x < 0]$ |

**ES 6.** Risolvi le seguenti equazioni e disequazioni logaritmiche, utilizzando il metodo grafico.

- |                                   |              |
|-----------------------------------|--------------|
| 1) $ x^2 - 4  = 3 \log_3(-1 - x)$ | $[x = -2]$   |
| 2) $ x  + 1 \geq \ln  x $         | $[x \neq 0]$ |

## MATRICI E TRASFORMAZIONI GEOMETRICHE

**ES 1.** Il triangolo ABC, avente  $A(0,1)$ ,  $B(4,-2)$  ha area 8. Determina le coordinate del punto C, sapendo che C appartiene al semipiano negativo delle ordinate e alla retta di equazione  $y = 2x - 5$ .  $[C(0, -5)]$

**ES 2.** Classifica le seguenti coniche scrivendo le equazioni in forma canonica e le equazioni delle rette degeneri.

- 1)  $x^2 + 6y^2 - 4xy = 0$
- 2)  $2x^2 + 2y^2 - xy + 3x + y + 1 = 0$
- 3)  $x^2 + 4xy + 4y^2 - 6x - 12y + 9 = 0$

**ES 3.** Determina la figura corrispondente del rettangolo di vertici  $A(2,2)$ ,  $B(1,4)$ ,  $C(6,-1)$ ,  $D(6,2)$  in una rotazione antioraria di un angolo retto di centro l'origine. Disegna le due figure.

**ES 4.** Determina il triangolo A'B'C' simmetrico rispetto all'origine del triangolo ABC di vertici  $A(-2,3)$ ,  $B(1,4)$ ,  $C(5,-1)$ . Disegna i due triangoli.

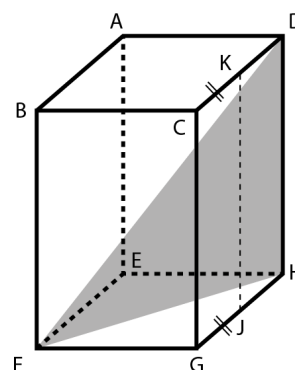
**ES 5.** Scrivi le equazioni della glissosimmetria che si ottiene componendo la traslazione di vettore  $\vec{v}(-2,1)$  con la simmetria di asse  $x = -2$ . Applica tale isometria al triangolo di vertici  $A(-1,7)$ ,  $B(3,5)$ ,  $C(5,9)$ .

**ES 6.** Determina l'equazione della parabola, corrispondente alla parabola di equazione  $y = -3x^2 + 1$ , nella similitudine ottenuta dalla composizione della traslazione di vettore  $\vec{v}(1, -2)$  con l'omotetia di centro  $O(0,0)$  e rapporto  $k = 3$ .

## GEOMETRIA EUCLIDEA NELLO SPAZIO

**ES 1** Osserva il prisma retto a base quadrata nella figura.

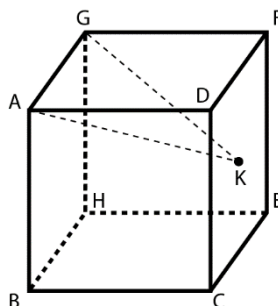
- I segmenti  $AE$  e  $KJ$  si trovano su rette parallele?
- I segmenti  $DH$  e  $FE$  si trovano su rette perpendicolari?
- Quale angolo forma il piano su cui giace  $DFH$  con la faccia  $DCGH$  del solido?
- Dimostra che il piano su cui giace  $DFH$  taglia il solido a metà.
- Esprimi la distanza tra lo spigolo  $CG$  e il triangolo  $DFH$  rispetto alla misura dello spigolo di base del solido.



$$\left[ \text{a) sì; b) sì; c) } 45^\circ; \text{e) } \frac{\sqrt{2}}{2} l \right]$$

**ES 2**  $K$  è il centro della faccia  $DCEF$  del cubo in figura, che ha lo spigolo che misura 8 cm. Calcola il perimetro del triangolo  $AKG$ .

$$[8(1 + \sqrt{6})\text{cm}]$$



**ES 3** Il volume di una piramide regolare a base quadrata è  $12544 \text{ cm}^3$  e lo spigolo di base è  $\frac{14}{25}$  dell'apotema. A quale distanza dalla base si deve condurre un piano a essa parallelo affinché il rapporto fra le aree della sezione e della base della piramide sia  $\frac{1}{16}$ ?

$$[36 \text{ cm}]$$

**ES 4** Su una semicirconferenza di diametro  $AB$  di lunghezza  $2r$  e centro  $O$ , conduci dal punto  $M$ , situato sul prolungamento del diametro (dalla parte del punto  $B$ ), la tangente alla semicirconferenza e indica con  $P$  il punto di tangenza. Indicato con  $x$  l'angolo  $\widehat{POM}$ :

- verifica che l'area del triangolo  $OPM$  è  $\frac{r^2}{2} \tan x$ ;
- individua il valore di  $x$  affinché l'area del triangolo  $APB$  sia pari a  $\sqrt{3}$  volte l'area del triangolo  $OPM$ ;
- utilizzando il valore di  $x$  individuato nel punto precedente, calcola il volume del solido ottenuto ruotando il triangolo  $APM$  intorno al segmento  $AM$ .

$$\left[ \text{b) } x = \frac{\pi}{6}; \text{c) } V = \frac{3 + 2\sqrt{3}}{36} \pi r^3 \right]$$

## GEOMETRIA ANALITICA NELLO SPAZIO

**ES 1** Scrivi l'equazione del piano che passa per i punti  $A(0,1,1)$ ,  $B(-1,1,0)$ ,  $C(2,0,1)$ .  $[x + 2y - z = 1]$

**ES 2** Scrivi l'equazione del piano passante per i punti  $A(-1,0,-2)$ ,  $B(3,-1,0)$ ,  $C(-1,3,2)$  e calcola la distanza del punto  $P(1,-4,2)$  dal piano.  $\left[ x + 8y - 6z - 7 = 0; \frac{46}{25}\sqrt{5} \right]$

**ES 3** Dato il piano  $\alpha: 3x - y + 2z - 4 = 0$  individua l'equazione del piano  $\beta$  parallelo al piano  $\alpha$  e passante per il punto  $A(1,0,-2)$ . Verifica, inoltre, che il punto  $P(4,5,-4)$  appartiene al piano  $\beta$ .  $[x - y + 2z + 1 = 0]$

**ES 4** Calcola il volume della piramide individuata dai punti  $A(0,1,1)$ ,  $B(2,2,0)$ ,  $C(2,0,-2)$  e  $V(3,-1,2)$ .  $[4]$

**ES 5** Data la retta  $r$  di equazione  $\begin{cases} x + 2y + 3 = 0 \\ 3y - z + 6 = 0 \end{cases}$  scrivi:

- a) le sue equazioni parametriche;
- b) l'equazione del piano contenente la retta  $r$  e passante per il punto  $P(1,1,3)$ .

$$\left[ \begin{array}{l} \text{a) } \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = -2 + t \\ z = 3t \end{cases} \quad \text{b) } x - y + z - 3 = 0 \end{array} \right]$$

**ES 6** Scrivi l'equazione della retta  $r$  passante per il punto  $P(0,2,-1)$ , parallela al piano di equazione  $x + y - 2z - 3 = 0$

e perpendicolare alla retta di equazioni  $\begin{cases} x = -2 - t \\ y = 1 + t \\ z = 2t \end{cases}$ .  $r: \begin{cases} x = 2t \\ y = 2 \\ z = -1 + t \end{cases}$

**ES 7** Scrivi l'equazione della superficie sferica  $S$  avente il centro nel punto  $C(1,3,-2)$  e tangente al piano  $\alpha$  di equazione  $x - 2y + 2z = 0$ . Calcola le coordinate del loro punto di tangenza  $T$ . Scrivi poi l'equazione del piano parallelo ad  $\alpha$  e tangente a  $S$ .  $[S: x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 6y + 4z + 5 = 0; T(2,1,0); x - 2y + 2z + 18 = 0]$

**ES 8** Scrivi l'equazione del cilindro avente le generatrici parallele all'asse  $y$  e la cui direttrice è la parabola del piano  $Oxz$ , con asse parallelo all'asse  $z$  e vertice nel punto  $V(2,0,4)$  e passante per il punto  $P(3,0,1)$ .  $[3x^2 - 12x + z + 8 = 0]$

**ES 9** Determina l'equazione della superficie conica avente come generatrice la retta  $\begin{cases} x = 0 \\ 3y - 2z = 0 \end{cases}$  e asse di rotazione l'asse  $z$ .  $[9x^2 + 9y^2 - 4z^2 = 0]$

**ES 10** Siano dati i punti  $A(2, -2, 2), B(2, -2, -1), C(-1, -2, -1), D(-1, -2, 2)$ .

- a) Verifica che i quattro punti giacciono su uno stesso piano e forma un quadrato;
- b) individua il punto  $V$  per cui il solido avente come base il quadrato  $ABCD$  e vertice il punto  $V$  (con ordinata positiva) sia una piramide retta con volume pari a 12;
- c) calcola la superficie laterale del cilindro equivalente al parallelepipedo retto avente come basi i quadrati  $ABCD$  e  $A'B'C'D'$  (dove i punti  $A', B', C', D'$  si trovano sul piano passante per il punto  $V$ ); l'altezza del cilindro è congruente al lato del quadrato.

$$\left[ \text{b) } V\left(\frac{1}{2}; 2; \frac{1}{2}\right); \text{c) } S_l = 12\sqrt{3}\pi \right]$$

**ES 11** Considera la superficie sferica di equazione  $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 1 = 0$ :

- a) determina il raggio e il centro;
- b) verifica che il piano di equazione  $\alpha: 5x - 2y + 3z + 8 = 0$  è esterno alla sfera;
- c) individua i punti di intersezione della superficie sferica con la retta di equazione  $\begin{cases} 2x - y = z + 6 \\ x + 2y = z - 1 \end{cases}$
- d) individua due piani paralleli al piano  $Oxy$  tali che il volume del cilindro avente come basi le intersezioni dei due piani con la superficie sia  $6\pi$  e la superficie laterale sia di  $4\sqrt{3}\pi$ .

$$\left[ \text{a) } C(1; -2; 0), r = 2; \text{c) } A(1; -2; -2), B\left(\frac{19}{7}; -\frac{10}{7}; \frac{6}{7}\right); \text{d) } z = \pm 1 \right]$$

## CALCOLO COMBINATORIO

**ES 1** Quanti numeri di quattro cifre tutte diverse si possono costruire con gli elementi dell'insieme  $A = \{1,2,3,5,7,9\}$ ? Quanti sono i numeri che iniziano con la cifra 5? [360; 60]

**ES 2** Quanti numeri diversi di quattro cifre si possono formare con le nove cifre significative del sistema numerico decimale  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ ? Quanti sono i numeri a quattro cifre che iniziano con la sequenza 65? [6561; 81]

**ES 3** Calcola in quanti modi si possono disporre in fila dieci scatole diverse e, nel caso le scatole siano sette di colore rosso e tre di colore verde, in quanti modi si trovano sistemate prima le scatole rosse e poi quelle verdi. [3628800; 30240]

**ES 4** Data una serie di nove scatole di uguale forma di cui tre rosse, due verdi, quattro bianche, calcola:

- a) in quanti modi si possono collocare in fila le scatole;
- b) quante sono le file in cui le scatole rosse occupano gli ultimi tre posti;
- c) in quante file le scatole di uguale colore sono vicine tra loro.

[1260; 15; 6]

**ES 5** In un corpo di ballo vi sono cinquanta ballerine: scelta la prima ballerina, calcola in quanti modi diversi può essere selezionato un gruppo di cinque ballerine comprimarie. [1906884]

**ES 6** Risolvi le seguenti equazioni e disequazioni.

a)  $\binom{x+1}{4} = \binom{x+1}{5}$  [x = 8]

b)  $\binom{x+3}{8} = \binom{x+2}{7}$  [x = 5]

c)  $\frac{1}{2}\binom{x}{3} \geq \binom{x}{2}$  [ $x \in \mathbb{N}, x \geq 8$ ]

d)  $\binom{x}{4} \geq \frac{1}{2}\binom{x}{3}$  [ $x \in \mathbb{N}, x \geq 5$ ]



## CALCOLO DELLE PROBABILITÀ

**ES 1** Un'urna contiene trenta gettoni numerati da 1 a 30. Calcola la probabilità che:

- a) estraendo successivamente 3 gettoni, rimettendo ogni volta il gettone nel contenitore, si abbiano tre numeri dispari;
- b) estraendo successivamente 4 gettoni, non rimettendo il gettone estratto ogni volta nel contenitore, si abbiano due numeri dispari e due numeri pari;
- c) estraendo contemporaneamente 6 gettoni, tre abbiano numeri divisibili per 4 e tre abbiano numeri multipli di 9.

$$\left[ \frac{1}{8}, \frac{35}{87}, \frac{1}{16965} \right]$$

**ES 2** Si estraggono successivamente quattro carte da un mazzo di 52 carte, senza rimettere la carta estratta nel mazzo. Calcola la probabilità che:

- a) escano quattro 5;
- b) escano quattro figure e un asso;
- c) tra le quattro carte non vi sia il cinque di fiori.

$$\left[ \frac{1}{270725}, \frac{176}{54145}, \frac{12}{13} \right]$$

**ES 3** Una scatola contiene 6 palline verdi numerate da 1 a 6 e 8 palline rosse numerate da 1 a 8. Si estraggono successivamente 4 palline, rimettendo ogni volta la pallina estratta nel contenitore. Calcola la probabilità che:

- a) le palline estratte siano di colore uguale;
- b) le palline estratte siano rosse o rechino un numero pari;
- c) almeno una pallina estratta sia verde.

$$\left[ \frac{337}{2401}, \frac{6241}{38416}, \frac{2145}{2401} \right]$$

**ES 4** Una busta contiene 30 francobolli italiani, 20 francesi e 10 inglesi. Viene estratto un francobollo, lo si reimmette nella busta e si estrae un secondo francobollo. Calcola la probabilità che si verifichino i seguenti eventi:

- a) i due francobolli sono italiani;
- b) il primo estratto francese, il secondo inglese;
- c) vengono estratti un francobollo italiano e uno francese in ordine qualsiasi.

$$\left[ \frac{1}{4}, \frac{1}{18}, \frac{1}{3} \right]$$

**ES 5** Una scatola contiene 10 palline rosse e 16 palline verdi. Si estraggono successivamente tre palline, sia rimettendo sia non rimettendo la pallina estratta nel contenitore. Calcola la probabilità che:

- a) almeno una pallina sia rossa;
- b) la prima pallina sia rossa e le restanti siano verdi;
- c) due palline siano rosse e una sia verde.

$$\left[ \frac{1685}{2197}, \frac{320}{2197}, \frac{600}{2197}, \frac{51}{65}, \frac{2}{13}, \frac{18}{65} \right]$$